

# Exercise Sheet

11/18

第 1、2 两题请依据 SimpleWhile 语言作答，仅考虑无范围限制的整数运算，不考虑变量是否初始化的问题。

1. 考虑：

- 循环语句：`while (0 < x) do { x = x - 1 }`
- 循环条件  $e$ ：`0 < x`
- 循环体  $c$ ：`x = x - 1`

请用列举集合元素或描述集合元素所符合性质的方式写出：

- $\llbracket \text{while } (e) \text{ do } \{c\} \rrbracket$
- $F(X) \triangleq \text{test\_true}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c \rrbracket \circ X \cup \text{test\_false}(\llbracket e \rrbracket)$  的全部不动点。

2. 考虑：

- 循环语句：`while (0 < x) do { if (0 < x) then { x = x - 1 } else { skip } }`
- 循环条件  $e$ ：`0 < x`
- 循环体  $c$ ：`if (0 < x) then { x = x - 1 } else { skip }`

请用列举集合元素或描述集合元素所符合性质的方式写出：

- $\llbracket \text{while } (e) \text{ do } \{c\} \rrbracket$
- $F(X) \triangleq \text{test\_true}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c \rrbracket \circ X \cup \text{test\_false}(\llbracket e \rrbracket)$  的全部不动点。

3. 证明或否定： $(\mathbb{N}, =)$  是一个完备偏序集。其中，等号表示整数相等关系。

4. 证明或否定：如果  $A$  是所有自然数集  $\mathbb{N}$  的有穷子集构成的集合， $(A, \subseteq)$  是一个完备偏序集。

5. 假设  $D$  表示自然数之间的整除关系， $m$  是某固定的自然数。证明： $F(n) = \text{gcd}(n, m)$  是  $(\mathbb{N}, D)$  上的单调函数，其中当  $n$  和  $m$  至少有一个非零时， $\text{gcd}(n, m)$  表示  $n$  与  $m$  的最大公约数，当  $n = m = 0$  时， $\text{gcd}(n, m) = 0$ 。

6. 假设  $D$  表示自然数之间的整除关系， $m$  是某固定的自然数。证明： $F(n) = \text{lcm}(n, m)$  是  $(\mathbb{N}, D)$  上的单调连续函数，其中当  $n$  和  $m$  都非零时， $\text{lcm}(n, m)$  表示  $n$  与  $m$  的最小公倍数，当  $n$  和  $m$  中至少有一个为 0 时， $\text{lcm}(n, m) = 0$ 。

7. 下面例子说明了 Kleene 不动点定理中，连续函数这一条件是必要的。考虑这样的集合  $A$ 、二元关系  $\leq_A$  与函数  $\text{succ}$ ：

- $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\omega, \omega + 1\}$ ，其中  $\omega$  是一个特殊的符号（不严谨地，可以将它理解成正无穷的意思）；
- $\leq_A = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\} \cup \{(n, \omega) \mid n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{(n, \omega + 1) \mid n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{(\omega, \omega), (\omega, \omega + 1), (\omega + 1, \omega + 1)\}$
- $\text{succ}$  是一个函数，对于  $n \in \mathbb{N}$ ， $\text{succ}(n) = n + 1$ ，并且  $\text{succ}(\omega) = \text{succ}(\omega + 1) = \omega + 1$ 。

请证明：

- $(A, \leq_A)$  是一个完备偏序集;
- $\text{succ}$  是  $(A, \leq_A)$  上的一个单调函数, 但不是一个连续函数;
- 假设  $\perp$  与  $\text{lub}$  是  $(A, \leq_A)$  的最小元与上确界计算函数, 那么

$$\text{lub}(\perp, \text{succ}(\perp), \text{succ}(\text{succ}(\perp)), \dots)$$

不是  $\text{succ}$  的不动点。