不动点定理

1 不动点分析

函数 $F(X) \triangleq \text{test\_true}([\![e]\!]) \circ [\![c]\!] \circ X \cup \text{test\_false}([\![e]\!])$ 的不动点具有下面这些性质。

- 如果从 s_1 出发执行循环语句 while (e) do $\{c\}$ 会以 s_2 为终止状态结束运行，那么对于任意一个 F 的不动点 X，都有
  - $(s_1, s_2) \in X$
  - 不存在其他的 s 使得 $(s_1, s) \in X$
- 如果从 s_1 出发执行循环语句 while (e) do $\{c\}$ 会在某一次执行循环体的过程中在循环体内部陷入死循环，那么对于任意一个 F 的不动点 X，都有
  - 不存在 s 使得 $(s_1, s) \in X$
- 如果从 s_1 出发执行循环语句 while (e) do $\{c\}$ 时每一次执行循环体后依次经过程序状态 $s_2, s_3, ...$ 循行不终止，那么对于任意一个 F 的不动点 X，以及任意程序状态 s，都有
  - 要么 $(s_1, s), (s_2, s), (s_3, s), ...$ 全部都是 X 的元素
  - 要么 $(s_1, s), (s_2, s), (s_3, s), ...$ 全部都不是 X 的元素

$[\![\text{while } (e) \text{ do } \{c\}]\!]$ 可以被定义为下述函数的最小不动点：

$$F(X) \triangleq \text{test\_true}([\![e]\!]) \circ [\![c]\!] \circ X \cup \text{test\_false}([\![e]\!])$$

2 Kleene 不动点定理

下面介绍 Kleene 不动点定理。这将统一的回答为什么有不动点，如何构造最小不动点。

- 定义：偏序集。满足下面三个条件的 $(A, \leqslant_A)$ 成为一个偏序集（partial ordering）：
  - 自反性：对于任意 $a \in A$， $a \leqslant_A a$
  - 传递性：对于任意 $a, b, c \in A$，如果 $a \leqslant_A b$、$b \leqslant_A c$，那么 $a \leqslant_A c$
  - 反对称性：对于任意 $a, b \in A$，如果 $a \leqslant_A b$、$b \leqslant_A a$，那么 $a = b$
- 例子：
  - $(\mathbb{R}, \leqslant)$ 是一个偏序集。
  - 如果 D 表示自然数之间的整除关系，即 $(a, b) \in D$ 当且仅当 $a \mid b$，那么 $(\mathbb{N}, D)$ 是一个偏序集。值得一提的是，在这个偏序关系下，两个自然数之间不一定可以相互比较；例如 $2 \nmid 3$ 并且 $3 \nmid 2$。
  - 如果 X 是一个集合，$\mathcal{P}(X)$ 表示 X 的幂集，那么 $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ 构成一个偏序集。

- 定义：完备偏序集。如果偏序集 $(A, \leqslant_A)$ 还满足下面性质，那么它是一个完备偏序集（complete partial ordering，CPO）：
  - 完备性：对于任意 $S \subseteq A$，如果 S 中任意两个元素之间都可以大小比较，那么 S 有上确界（least upper bound, lub），记做 $\mathrm{lub}(S)$，即：(1) 对于任意 $a \in S$，$a \leqslant_A \mathrm{lub}(S)$；(2) 如果某个 $b \in A$ 使得每一个 $a \in S$ 都有 $a \leqslant_A b$，那么 $\mathrm{lub}(S) \leqslant_A b$。
  - 注：符合上述性质的 S 称为偏序集 A 上的一条链。
- 例子：
  - $(\mathbb{R}, \leqslant)$ 是偏序集但是不是完备偏序集，因为 $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ 是一条链，但是它没有上确界。
  - 如果 X 是一个集合，$\mathcal{P}(X)$ 表示 X 的幂集，那么 $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ 是一个完备偏序集。其中，对于任意 $U \subseteq \mathcal{P}(X)$，都有 $\mathrm{lub}(U) = \bigcup_{V \in U} V$ 是 U 的上确界。
  - 如果 D 表示自然数之间的整除关系，即 $(a, b) \in D$ 当且仅当 $a \mid b$，那么 $(\mathbb{N}, D)$ 是一个完备偏序集。特别的，如果 $U \subseteq \mathbb{N}$ 是一条链还是一个有穷集，那么 $\mathrm{lub}(U)$ 就是 U 的最小公倍数；如果 $U \subseteq \mathbb{N}$ 是一条链还是一个无穷集，那么 $\mathrm{lub}(U)$ 就是 0。
  - 如果 D^+ 表示正整数之间的整除关系，那么 $(\mathbb{Z}^+, D^+)$ 是一个偏序集，但不是一个完备偏序集。例如，$\{1, 2, 4, 8, ..., 2^n, ...\}$ 是整除关系上的一条链，但是它没有整除关系意义下的上确界。
- 定义：单调函数。如果 $(A, \leqslant_A)$ 是一个偏序集，那么 $F : A \to A$ 是一个单调函数当且仅当：对于任意 $a, b \in A$，如果 $a \leqslant_A b$，那么 $F(a) \leqslant_A F(b)$。
- 引理：如果 S 是偏序集 $(A, \leqslant_A)$ 上的一条链，$F : A \to A$ 是一个单调函数，那么 $F(S) \triangleq \{F(a) \mid a \in S\}$ 也是一条链。
- 证明：任给 $a, b \in S$，要么 $a \leqslant_A b$，要么 $b \leqslant_A a$。若前者成立，那么 $F(a) \leqslant_A F(b)$；若后者成立，那么 $F(b) \leqslant_A F(a)$，因此 $F(S)$ 中的元素间两两可以比较大小。
- 定义：单调连续函数。如果 $(A, \leqslant_A)$ 是一个完备偏序集，那么单调函数 $F : A \to A$ 是连续的当且仅当：对于任意一条非空链 S，$F(\mathrm{lub}(S)) = \mathrm{lub}(F(S))$。
- 引理：如果 $(A, \leqslant_A)$ 是一个完备偏序集，那么这个集合上有最小元，记做 $\perp$。
- 证明：空集 $\varnothing$ 是 $(A, \leqslant_A)$ 上的一条链。而任何一个 A 中元素，都是空集的上界。因此，对于任意 $a \in A$ 都有，$\mathrm{lub}(\varnothing) \leqslant_A a$。
- 引理：如果 F 是完备偏序集 $(A, \leqslant_A)$ 上的单调连续函数，那么 $\{\perp, F(\perp), F(F(\perp)), ...\}$ 是 $(A, \leqslant_A)$ 上的一条链。
- 证明：

  由于 $\perp$ 是最小元，所以 $\perp \leqslant_A F(\perp)$。由于 F 是单调函数，所以 $F(\perp) \leqslant_A F(F(\perp))$。依次类推，$\perp \leqslant_A F(\perp) \leqslant_A F(F(\perp)) \leqslant_A ...$
- 定理：如果 F 是完备偏序集 $(A, \leqslant_A)$ 上的单调连续函数，$\mathrm{lub}(\perp, F(\perp), F(F(\perp)), ...)$ 是 F 的一个不动点。
- 证明：

$$
\begin{aligned}
& F(\mathrm{lub}(\perp, F(\perp), F(F(\perp)), ...)) \\
= \quad & \mathrm{lub}(F(\perp), F(F(\perp)), F(F(F(\perp))), ...) \\
= \quad & \mathrm{lub}(\perp, F(\perp), F(F(\perp)), F(F(F(\perp))), ...)
\end{aligned}
$$

- 定理:如果 F 是完备偏序集 $(A, \leqslant_A)$ 上的单调连续函数且 $F(a)=a$,那么 $\text{lub}(\perp, F(\perp), F(F(\perp)), ...) \leqslant_A a$。

- 证明：

$$
\begin{aligned}
&\perp \leqslant_A a \\
&F(\perp) \leqslant_A F(a) = a \\
&F(F(\perp)) \leqslant_A F(a) = a \\
&...
\end{aligned}
$$

用 Kleene 不动点定义 while 语句语义

- $(\mathcal{P}(\text{state} \times \text{state}), \subseteq)$ 是一个完备偏序集；
- $F(X) \triangleq \text{test\_true}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c \rrbracket \circ X \cup \text{test\_false}(\llbracket e \rrbracket)$ 是一个单调连续函数；
    - $G(X) = Y \circ X$ 是单调连续函数；
    - $H(X) = X \cup Y$ 是单调连续函数；
    - 如果 $G(X)$ 与 $H(X)$ 都是单调连续函数，那么 $G(H(X))$ 也是单调连续函数；
- F 的最小不动点是：

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(F^{(n)}(\emptyset)\right)$$

两种定义的对应关系 $F^{(n)}(\emptyset) = \text{boundedLB}(\llbracket e \rrbracket, \llbracket c \rrbracket)$。