

Exercise Sheet

11/19

第 1、2 两题请依据 SimpleWhile 语言作答，仅考虑无范围限制的整数运算，不考虑变量是否初始化的问题。第 8、9 两题请依据 While 语言作答。

1. 考虑：

- 循环语句： `while (0 < x) do { x = x - 1 }`
- 循环条件 e ： `0 < x`
- 循环体 c ： `x = x - 1`

请用列举集合元素或描述集合元素所符合性质的方式写出：

- $\llbracket \text{while } (e) \text{ do } \{c\} \rrbracket$
- $F(X) \triangleq \text{test_true}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c \rrbracket \circ X \cup \text{test_false}(\llbracket e \rrbracket)$ 的全部不动点。

2. 考虑：

- 循环语句： `while (0 < x) do { if (0 < x) then { x = x - 1 } else { skip } }`
- 循环条件 e ： `0 < x`
- 循环体 c ： `if (0 < x) then { x = x - 1 } else { skip }`

请用列举集合元素或描述集合元素所符合性质的方式写出：

- $\llbracket \text{while } (e) \text{ do } \{c\} \rrbracket$
- $F(X) \triangleq \text{test_true}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c \rrbracket \circ X \cup \text{test_false}(\llbracket e \rrbracket)$ 的全部不动点。

3. 证明或否定： $(\mathbb{N}, =)$ 是一个完备偏序集。其中，等号表示整数相等关系。

4. 证明或否定：如果 A 是所有自然数集 \mathbb{N} 的有穷子集构成的集合， (A, \subseteq) 是一个完备偏序集。

5. 假设 D 表示自然数之间的整除关系， m 是某固定的自然数。证明： $F(n) = \gcd(n, m)$ 是 (\mathbb{N}, D) 上的单调函数，其中当 n 和 m 至少有一个非零时， $\gcd(n, m)$ 表示 n 与 m 的最大公约数，当 $n = m = 0$ 时， $\gcd(n, m) = 0$ 。

6. 假设 D 表示自然数之间的整除关系， m 是某固定的自然数。证明： $F(n) = \text{lcm}(n, m)$ 是 (\mathbb{N}, D) 上的单调连续函数，其中当 n 和 m 都非零时， $\text{lcm}(n, m)$ 表示 n 与 m 的最小公倍数，当 n 和 m 中至少有一个为 0 时， $\text{lcm}(n, m) = 0$ 。

7. 下面例子说明了 Kleene 不动点定理中，连续函数这一条件是必要的。考虑这样的集合 A 、二元关系 \leq_A 与函数 succ ：

- $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\omega, \omega + 1\}$ ，其中 ω 是一个特殊的符号（不严谨地，可以将它理解成正无穷的意思）；
- $\leq_A = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\} \cup \{(n, \omega) \mid n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{(n, \omega + 1) \mid n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{(\omega, \omega), (\omega, \omega + 1), (\omega + 1, \omega + 1)\}$
- succ 是一个函数，对于 $n \in \mathbb{N}$ ， $\text{succ}(n) = n + 1$ ，并且 $\text{succ}(\omega) = \text{succ}(\omega + 1) = \omega + 1$ 。

请证明：

- (A, \leq_A) 是一个完备偏序集；

- succ 是 (A, \leq_A) 上的一个单调函数，但不是一个连续函数；
- 假设 \perp 与 lub 是 (A, \leq_A) 的最小元与上确界计算函数，那么

$$\text{lub}(\perp, \text{succ}(\perp), \text{succ}(\text{succ}(\perp)), \dots)$$

不是 succ 的不动点。

8. 【判断题】请判断以下说法是否正确：假设 $\llbracket c \rrbracket.(\text{inf})$ 表示所有使得程序 c 运行不终止的起始程序状态集合，那么

$$\begin{aligned} \llbracket \text{while } (e) \text{ do } \{ c \} \rrbracket.(\text{inf}) = \\ \text{test_true}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c \rrbracket.(\text{nrm}) \circ \llbracket \text{while } (e) \text{ do } \{ c \} \rrbracket.(\text{inf}) \cup \\ \text{test_true}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c \rrbracket.(\text{inf}) \end{aligned}$$

9. 【判断题】请判断以下说法是否正确：假设 $\llbracket c \rrbracket.(\text{inf})$ 表示所有使得程序 c 运行不终止的起始程序状态集合，那么

$$\llbracket \text{while } (e) \text{ do } \{ c \} \rrbracket.(\text{inf})$$

是以下函数在集合包含意义下的最小不动点：

$$F(x) \triangleq \text{test_true}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c \rrbracket.(\text{nrm}) \circ X \cup \text{test_true}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c \rrbracket.(\text{inf})$$

10. 以下是一个 SetMonad 中的循环体：

```
Definition d1 (x: Z): SetMonad.M (ContinueOrBreak Z Z) :=
  choice
    (assume (x >= 1);; continue (x - 1))
    (assume (x = 0);; break x).
```

请写出以下集合单子表示的集合：

```
repeat_break_f d1 ∅
repeat_break_f d1 (repeat_break_f d1 ∅)
repeat_break_f d1 (repeat_break_f d1 (repeat_break_f d1 ∅))
repeat_break d1
```