# 指称语义与解释器

## 1 定义有符号 64 位运算的表达式语义

在表达式的指称语义中表示表达式求值错误（有符号 64 位整数的运算越界的情况）这一概念，数学上有两种常见方案。其一是将求值结果由“整数”改为“整数或求值失败”。

- 原指称语义：

$$\forall e.\quad [\![e]\!] : \text{state} \to \mathbb{Z}$$

- 新指称语义：

$$\forall e.\quad [\![e]\!] : \text{state} \to \mathbb{Z} \cup \{\epsilon\}$$

- 程序状态：

$$\text{state} \triangleq \text{var_name} \to \mathbb{Z}$$

$$s \in \text{state} \text{ 合法当且仅当 } \forall x.\ -2^{63} \leqslant s(x) \leqslant 2^{63} - 1$$

- $[\![n]\!](s) = n$，若 $-2^{63} \leqslant n \leqslant 2^{63} - 1$
- $[\![n]\!](s) = \epsilon$，若 $-2^{63} \leqslant n \leqslant 2^{63} - 1$ 不成立
- $[\![x]\!](s) = s(x)$
- 若 $[\![e_1]\!](s) \neq \epsilon$，$[\![e_2]\!](s) \neq \epsilon$ 并且 $-2^{63} \leqslant [\![e_1]\!](s) + [\![e_2]\!](s) \leqslant 2^{63} - 1$
  $[\![e_1 + e_2]\!](s) = [\![e_1]\!](s) + [\![e_2]\!](s)$
- 若否
  $[\![e_1 + e_2]\!](s) = \epsilon$
- $[\![e_1 - e_2]\!](s) = ...$
- $[\![e_1 * e_2]\!](s) = ...$

## 2 变量初始化与表达式语义

- $s \in \text{state}$ 当且仅当 $s$ 是这样的一个二元组 $s = (s_{\text{status}}, s_{\text{value}})$，其中

$$s_{\text{status}} : \text{var_name} \to \{\text{I}, \text{U}\},$$
$$s_{\text{value}} : \text{var_name} \to \mathbb{Z} \cup \{\epsilon\}$$

- $s \in \text{state}$ 是一个合法状态当且仅当

$$\forall x.\ s_{\text{status}}(x) = \text{I} \Rightarrow -2^{63} \leqslant s_{\text{value}}(x) \leqslant 2^{63} - 1$$
$$\forall x.\ s_{\text{status}}(x) = \text{U} \Rightarrow s_{\text{value}}(x) = \text{U}$$

- $[\![e]\!] : \text{state} \to \mathbb{Z} \cup \{\epsilon\}$

# 3 程序语句的语义：表达式求值可能出错的情形

下面定义程序语句的语义。程序语句的语义包含两种情况：正常运行终止和运行出错。
整数类型表达式

$[\![e]\!] : \text{state} \to \mathbb{Z} \cup \{\epsilon\}$
$[\![e]\!](s) \in \mathbb{Z}$ 表示 $e$ 在 $s$ 可以合法完成求值
$[\![e]\!](s) = \epsilon$ 表示 $e$ 在 $s$ 计算时出错。

布尔类型表达式

$[\![e]\!] \in \mathcal{P}(\text{state}) \times \mathcal{P}(\text{state}) \times \mathcal{P}(\text{state})$
$s \in [\![e]\!]_{\text{true}}$ 表示 $e$ 在 $s$ 求值结果为真
$s \in [\![e]\!]_{\text{false}}$ 表示 $e$ 在 $s$ 求值结果为真
$s \in [\![e]\!]_{\text{err}}$ 表示 $e$ 在 $s$ 求值出错
$\text{test_true}([\![e]\!]) = \{(s, s) \mid s \in [\![e]\!]_{\text{true}}\}$
$\text{test_false}([\![e]\!]) = \{(s, s) \mid s \in [\![e]\!]_{\text{false}}\}$

程序语句

$[\![c]\!] \in \mathcal{P}(\text{state} \times \text{state}) \times \mathcal{P}(\text{state})$
$(s_1, s_2) \in [\![c]\!]_{\text{nrm}}$ 表示从 $s_1$ 开始执行程序 $c$ 会以 $s_2$ 终止
$s \in [\![c]\!]_{\text{err}}$ 表示从 $s$ 开始执行程序 $c$ 会出错

空语句的语义：

$[\![\text{skip}]\!]_{\text{nrm}} = \text{id}_{\text{state}}$
$[\![\text{skip}]\!]_{\text{err}} = \varnothing$

赋值语句的语义：

$(s_1, s_2) \in [\![\text{x} = \text{e}]\!]_{\text{nrm}}$ 当且仅当

- $[\![e]\!](s_1) = s_{2_{\text{value}}}(x) \in \mathbb{Z}$
- $s_{2_{\text{state}}}(x) = I$
- $s_1$ 和 $s_2$ 在其他变量上的状态与值相同

$s_1 \in [\![\text{x} = \text{e}]\!]_{\text{err}}$ 当且仅当 $[\![e]\!](s_1) = \epsilon$

顺序执行语句的语义：

$$[\![c_1; c_2]\!]_{\text{nrm}} = [\![c_1]\!]_{\text{nrm}} \circ [\![c_2]\!]_{\text{nrm}}$$

$$[\![c_1; c_2]\!]_{\text{err}} = [\![c_1]\!]_{\text{err}} \cup [\![c_1]\!]_{\text{nrm}} \circ [\![c_2]\!]_{\text{err}}$$

其中，如果 $R \subseteq A \times A$ 并且 $X \subseteq A$，那么 $R \circ X \triangleq \{a \mid \exists b.(a, b) \in R,\ b \in X\}$

条件分支语句的语义：

$$[\![\text{if } (e) \text{ then}\{c_1\} \text{ else } \{c_2\}]\!]_{\text{nrm}} = \text{test_true}([\![e]\!]) \circ [\![c_1]\!]_{\text{nrm}} \cup \text{test_false}([\![e]\!]) \circ [\![c_2]\!]_{\text{nrm}}$$

$$[\![\text{if } (e) \text{ then}\{c_1\} \text{ else } \{c_2\}]\!]_{\text{err}} = [\![e]\!]_{\text{err}} \cup \text{test_true}([\![e]\!]) \circ [\![c_1]\!]_{\text{err}} \cup \text{test_false}([\![e]\!]) \circ [\![c_2]\!]_{\text{err}}$$

循环语句的语义：

$$\begin{aligned}&[\![\text{while } (e) \text{ do } \{c\}]\!]_{\text{nrm}}\\&\quad = \mu X.\ \text{test_true}([\![e]\!]) \circ [\![c]\!]_{\text{nrm}} \circ X \cup \text{test_false}([\![e]\!])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[\![\text{while } (e) \text{ do } \{c\}]\!]_{\text{err}}\\&\quad = \mu X.\ \text{test_true}([\![e]\!]) \circ ([\![c]\!]_{\text{nrm}} \circ X \cup [\![c]\!]_{\text{err}}) \cup [\![e]\!]_{\text{err}}\end{aligned}$$

# 4 程序语句的语义：break 与 continue

考虑在程序语言中添加 break 与 continue 语句：

$$\begin{aligned}[\![c]\!] \ \in \ & \mathcal{P}(\text{state} \times \text{state}) \times\\ & \mathcal{P}(\text{state} \times \text{state}) \times\\ & \mathcal{P}(\text{state} \times \text{state}) \times\\ & \mathcal{P}(\text{state})\end{aligned}$$

$(s_1, s_2) \in [\![c]\!]_{\text{nrm}}$ 普通终止
$(s_1, s_2) \in [\![c]\!]_{\text{brk}}$ 通过 break 终止
$(s_1, s_2) \in [\![c]\!]_{\text{cnt}}$ 通过 continue 终止
$s \in [\![c]\!]_{\text{err}}$ 出错

空语句的语义：

$$\begin{aligned}&[\![\text{skip}]\!]_{\text{nrm}} = \text{id}_{\text{state}}\\&[\![\text{skip}]\!]_{\text{brk}} = \varnothing\\&[\![\text{skip}]\!]_{\text{cnt}} = \varnothing\\&[\![\text{skip}]\!]_{\text{err}} = \varnothing\end{aligned}$$

break 语句的语义

$$\begin{aligned}&[\![\text{break}]\!]_{\text{nrm}} = \varnothing\\&[\![\text{break}]\!]_{\text{brk}} = \text{id}_{\text{state}}\\&[\![\text{break}]\!]_{\text{cnt}} = \varnothing\\&[\![\text{break}]\!]_{\text{err}} = \varnothing\end{aligned}$$

continue 语句的语义

$$\begin{aligned}&[\![\text{continue}]\!]_{\text{nrm}} = \varnothing\\&[\![\text{continue}]\!]_{\text{brk}} = \varnothing\\&[\![\text{continue}]\!]_{\text{cnt}} = \text{id}_{\text{state}}\\&[\![\text{continue}]\!]_{\text{err}} = \varnothing\end{aligned}$$

continue 语句的语义

$$\begin{aligned}&[\![c_1; c_2]\!]_{\text{nrm}} = [\![c_1]\!]_{\text{nrm}} \circ [\![c_2]\!]_{\text{nrm}}\\&[\![c_1; c_2]\!]_{\text{brk}} = [\![c_1]\!]_{\text{brk}} \cup [\![c_1]\!]_{\text{nrm}} \circ [\![c_2]\!]_{\text{brk}}\\&[\![c_1; c_2]\!]_{\text{cnt}} = [\![c_1]\!]_{\text{cnt}} \cup [\![c_1]\!]_{\text{nrm}} \circ [\![c_2]\!]_{\text{cnt}}\\&[\![c_1; c_2]\!]_{\text{err}} = [\![c_1]\!]_{\text{err}} \cup [\![c_1]\!]_{\text{nrm}} \circ [\![c_2]\!]_{\text{err}}\end{aligned}$$

赋值语句的语义：

$(s_1, s_2) \in [\![\mathrm{x} = \mathrm{e}]\!]_{\mathrm{nrm}}$ 当且仅当...

$s_1 \in [\![\mathrm{x} = \mathrm{e}]\!]_{\mathrm{err}}$ 当且仅当 $[\![e]\!](s_1) = \epsilon$

$[\![\mathrm{x} = \mathrm{e}]\!]_{\mathrm{brk}} = \varnothing$

$[\![\mathrm{x} = \mathrm{e}]\!]_{\mathrm{cnt}} = \varnothing$

If 语句的语义

$$[\![\text{if } (e) \text{ then}\{c_1\} \text{ else } \{c_2\}]\!]_{\mathrm{nrm}} = \mathrm{test_true}([\![e]\!]) \circ [\![c_1]\!]_{\mathrm{nrm}} \cup \mathrm{test_false}([\![e]\!]) \circ [\![c_2]\!]_{\mathrm{nrm}}$$

$$[\![\text{if } (e) \text{ then}\{c_1\} \text{ else } \{c_2\}]\!]_{\mathrm{err}} = [\![e]\!]_{\mathrm{err}} \cup \mathrm{test_true}([\![e]\!]) \circ [\![c_1]\!]_{\mathrm{err}} \cup \mathrm{test_false}([\![e]\!]) \circ [\![c_2]\!]_{\mathrm{err}}$$

$$[\![\text{if } (e) \text{ then}\{c_1\} \text{ else } \{c_2\}]\!]_{\mathrm{brk}} = [\![e]\!]_{\mathrm{brk}} \cup \mathrm{test_true}([\![e]\!]) \circ [\![c_1]\!]_{\mathrm{brk}} \cup \mathrm{test_false}([\![e]\!]) \circ [\![c_2]\!]_{\mathrm{brk}}$$

$$[\![\text{if } (e) \text{ then}\{c_1\} \text{ else } \{c_2\}]\!]_{\mathrm{cnt}} = [\![e]\!]_{\mathrm{cnt}} \cup \mathrm{test_true}([\![e]\!]) \circ [\![c_1]\!]_{\mathrm{cnt}} \cup \mathrm{test_false}([\![e]\!]) \circ [\![c_2]\!]_{\mathrm{cnt}}$$

While 语句的语义

$$[\![\text{while } (e) \text{ do } \{c\}]\!]_{\mathrm{nrm}} = \mu X.\ \begin{array}{l} \mathrm{test_true}([\![e]\!]) \circ [\![c]\!]_{\mathrm{nrm}} \circ X \cup \\ \mathrm{test_true}([\![e]\!]) \circ [\![c]\!]_{\mathrm{cnt}} \circ X \cup \\ \mathrm{test_true}([\![e]\!]) \circ [\![c]\!]_{\mathrm{brk}} \cup \\ \mathrm{test_false}([\![e]\!]) \end{array}$$

$$[\![\text{while } (e) \text{ do } \{c\}]\!]_{\mathrm{err}} = \mu X.\ \begin{array}{l} \mathrm{test_true}([\![e]\!]) \circ [\![c]\!]_{\mathrm{nrm}} \circ X \cup \\ \mathrm{test_true}([\![e]\!]) \circ [\![c]\!]_{\mathrm{cnt}} \circ X \cup \\ \mathrm{test_true}([\![e]\!]) \circ [\![c]\!]_{\mathrm{err}} \cup \\ [\![e]\!]_{\mathrm{err}} \end{array}$$

$$[\![\text{while } (e) \text{ do } \{c\}]\!]_{\mathrm{brk}} = \varnothing$$

$$[\![\text{while } (e) \text{ do } \{c\}]\!]_{\mathrm{cnt}} = \varnothing$$