课后思考题 1028

习题 1.

证明或否定：$(\mathbb{N}, =)$ 是一个完备偏序集。其中，等号表示整数相等关系。

习题 2.

证明或否定：如果 A 是所有自然数集 $\mathbb{N}$ 的有穷子集构成的集合，$(A, \subseteq)$ 是一个完备偏序集。

习题 3.

假设 D 表示自然数之间的整除关系，m 是某固定的自然数。证明：$F(n) = \gcd(n, m)$ 是 $(\mathbb{N}, D)$ 上的单调函数，其中当 n 和 m 至少有一个非零时，$\gcd(n, m)$ 表示 n 与 m 的最大公约数，当 $n = m = 0$ 时，$\gcd(n, m) = 0$。

习题 4.

假设 D 表示自然数之间的整除关系，m 是某固定的自然数。证明：$F(n) = \mathrm{lcm}(n, m)$ 是 $(\mathbb{N}, D)$ 上的单调连续函数函数，其中当 n 和 m 都非零时，$\mathrm{lcm}(n, m)$ 表示 n 与 m 的最小公倍数，当 n 和 m 中至少有一个为 0 时，$\mathrm{lcm}(n, m) = 0$。

习题 5.

考虑完备偏序集 $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$。令

$$F(X) = \{n + 1 \mid n \in X\} \cup \{0\}$$

- 请证明 F 是 $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ 上的单调连续函数。
- 请写出 $F(\varnothing)$、$F(F(\varnothing))$、$F(F(F(\varnothing)))$。
- 请写出 F 的所有不动点。

习题 6.

考虑完备偏序集 $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$。令

$$F(X) = \{n + 2 \mid n \in X\} \cup \{0\}$$

- 请写出 $F(\varnothing)$、$F(F(\varnothing))$、$F(F(F(\varnothing)))$、$F^{(k)}(\varnothing)$。
- 请写出 F 的所有不动点。

习题 7.

考虑完备偏序集 $(\mathcal{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}), \subseteq)$。令

$$F(X) = \{(n + 2, m) \mid (n, m) \in X, n + 2 \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

- 请写出 $F(\varnothing)$、$F(F(\varnothing))$、$F(F(F(\varnothing)))$、$F^{(k)}(\varnothing)$。
- 请写出 F 的所有不动点。

习题 8.

下面例子说明了 Kleene 不动点定理中，连续函数这一条件是必要的。考虑这样的集合 A、二元关系 $\leqslant_A$ 与函数 succ：

- $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\omega, \omega + 1\}$，其中 ω 是一个特殊的符号（不严谨地，可以将它理解成正无穷的意思）；
- $\leqslant_A = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}, n \leqslant m\} \cup \{(n, \omega) \mid n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{(n, \omega+1) \mid n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{(\omega, \omega), (\omega, \omega + 1), (\omega + 1, \omega + 1)\}$
- succ 是一个函数，对于 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{succ}(n) = n + 1$，并且 $\mathrm{succ}(\omega) = \mathrm{succ}(\omega + 1) = \omega + 1$。

请证明：

- $(A, \leqslant_A)$ 是一个完备偏序集；
- succ 是 $(A, \leqslant_A)$ 上的一个单调函数，但不是一个连续函数；
- 假设 $\bot$ 与 lub 是 $(A, \leqslant_A)$ 的最小元与上确界计算函数，那么

  $$\mathrm{lub}(\bot, \mathrm{succ}(\bot), \mathrm{succ}(\mathrm{succ}(\bot)), ...)$$

  不是 succ 的不动点。

习题 9.

假设 $F(X)$ 是完备偏序集 $(A, \leqslant_A)$ 上的一个单调连续函数，并且 $a \in A$ 满足 $\bot \leqslant_A a \leqslant_A F(\bot)$。请证明或否定：

$$\mathrm{lub}(a, F(a), F(F(a)), ...)$$

是一个良定义并且是 F 的最小不动点。

习题 10.

假设 $F(X)$ 是完备偏序集 $(A, \leqslant_A)$ 上的一个单调连续函数，并且 $a \in A$ 满足 $a \leqslant_A F(a)$。请证明或否定：

$$\mathrm{lub}(a, F(a), F(F(a)), ...)$$

是一个良定义并且是 F 的最小不动点。